Date

2005年　東大数学　文系第1問

$f(x)=px^2+qx+r$ とおく（但し $f(x)$ は2次関数なので $p\neq0$）

$f(0)=0$ より $r=0$ ← 簡単なので はじめにやっておく

よって $f(x)=px^2+qx$

はじめに、キチンと定義

$$I=\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$$ とおく

積分を定義

↓定義　↓定義

$$I_1=\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx\qquad I_2=\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$$ とおく

書くと面倒なので、定義しておく。

まずは、I_1 を処理

$-1\leqq x\leqq 0$ において、$f'(x)=2px+q$　$g'(x)=a$ なので

$$I_1=\int_{-1}^{0}\{(2px+q)-a\}^2dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\{4p^2x^2+4p(q-a)x+(q-a)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}p^2x^3+2p(q-a)x^2+(q-a)^2x\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{4}{3}p^2(0+1)+2p(q-a)(0-1)+(q-a)^2(0+1)$$

$$=\frac{4}{3}p^2-2p(q-a)+(q-a)^2$$

次に、I_2 を処理

$0\leqq x\leqq 1$ において、$f'(x)=2px+q$　$g'(x)=b$ なので

$$I_2=\int_{0}^{1}\{(2px+q)-b\}^2dx$$

$$=\int_{0}^{1}\{4p^2x^2+4p(q-b)x+(q-b)^2\}^2dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}p^2x^3+2p(q-b)x^2+(q-b)^2x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{4}{3}p^2+2p(q-b)+(q-b)^2$$

よって、

$$I=I_1+I_2=\frac{4}{3}p^2-2p(q-a)+(q-a)^2+\frac{4}{3}p^2+2p(q-b)+(q-b)^2$$

$$=(q-a)^2-2p(q-a)+(q-b)^2+2p(q-b)+\frac{8}{3}p^2$$

a, b をいろいろ変化させて、I の最小を探るので、I を a と b の関数とみる。 p、q は定数となる。

I は、a と b に関して、2次関数なので、平方完成して、

$$I=(a-q+p)^2+(b-q-p)^2+\frac{2}{3}p^2$$

実際は、$a-q$、$b-q$ をカタマリとみなすと楽です。

よって、I は $a=q-p$　$b=q+p$ のときに最小になる。

このとき、

$$g(x)=\begin{cases}(q-p)x & (x\leqq0)\\(q+p)x & (0<x)\end{cases}$$ となるので

$g(-1)=f(-1)=p-q$

$g(1)=f(1)=p+q$ が成立する。

よって、証明された。